

U - 339

B. Sc. (First Year)

EXAMINATION, March, 2018

MATHEMATICS

Paper - III

## VECTOR ANALYSIS AND GEOMETRY

Time : Three Hours

Maximum Marks : 40 (For Regular Students)

Minimum Pass Marks : 14

Maximum Marks : 50 (For Private Students)

Minimum Pass Marks : 34%

**नोट-** सभी प्रश्न हल कीजिए। प्रश्न क्रमांक 1 अनिवार्य है। प्रश्न क्रमांक 1 से 5 भाग हल कीजिए।

Attempt all questions. Question no. 1 is compulsory. Solve any five parts from question no. 1.

I. किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये-  $2 \times 5/3 \times 5$

Attempt any five questions-

- (i) उस समान्तर षटफलक का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी कोरें  $a = 2i - 3j + k$ ,  
 $b = i - 3j + 4k$  और  $c = 2i - 5j + 3k$ ।

P.T.O.

Find the volume of a parallelopiped whose edges are represented

$$a = 2i - 3j + k, b = i - 3j + 4k$$

$$c = 2i - 5j + 3k.$$

(ii) सिद्ध करो कि-

$$a.a' + b.b' + c.c' = 3$$

Prove that-

$$a.a' + b.b' + c.c' = 3$$

(iii) यदि  $r = (t - t^2)i + 2t^2 j - 3k$ ,

$\int r dt$  का मान ज्ञात कीजिए।

If  $r = (t - t^2)i + 2t^2 j - 3k$ , then find

$\int r dt$ .

(iv)  $\frac{d^2 r}{dt^2} = -\mu^2 r$  का समाकलन ज्ञात कीजिए।

Integrate-

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\mu^2 r$$

(v) निम्नलिखित समीकरण कौन से शांकव निरूपित करते हैं ? उनके केन्द्र तथा अनन्तस्पर्शियों के समीकरण ज्ञात कीजिए-

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

Which conics are represented by the following curve ? Find their centre and equation of asymptotes-

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

- (vi) शंकु  $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$  की नियता का समीकरण ज्ञात कीजिए।

To find the equation to the directrix of the conic-

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$$

- (vii) उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष  $(0, 0, 3)$  और आधार वक्र वृत्त  $x^2 + y^2 = 4, z = 0$  है।

Find the equation of the cone whose vertex is  $(0, 0, 3)$  and base is the circle

$$x^2 + y^2 = 4, z = 0.$$

- (viii) लम्बवृतीय शंकु की व्याख्या कीजिए।

Explain right circular cone.

- (ix) घुमीय रेखाओं की व्याख्या कीजिए।

Explain Polar lines.

- (x) एक शांकवज का अन्वालोपी शंकु की व्याख्या कीजिए।

Explain Enveloping cone to a conicoid.

### इकाई - I

#### (Unit-I)

2. यदि  $a', b', c'$  क्रमशः सदिश  $a, b, c$  के व्युत्क्रम सदिश हैं तो सिद्ध कीजिए-

$$a' \times b' + b' \times c' + c' \times a' = \frac{a + b + c}{[abc]}, \quad \text{जहाँ}$$

सदिश  $a, b, c$  असमतलीय है। 6/7

If  $a', b', c'$  are reciprocal vectors of the vector  $a, b, c$  respectively, then prove that

$$a' \times b' + b' \times c' + c' \times a' = \frac{a + b + c}{[abc]},$$

Where vector  $a, b, c$  are non-coplanar.

### अथवा

(Or)

सतह  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  के बिन्दु  $(4, 0, 3)$  पर स्पर्श समतल व अभिलम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of tangent plane and normal line to the surface

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25 \text{ at the point } (4, 0, 3).$$

( 5 )

U - 339

उकाई - II

( Unit - II )

3.  $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  का पूर्णांकन कीजिए जहाँ  
 $\mathbf{F} = yzi + zxj + xyk$  तथा वक्र  $c$  हेलिक्स  
 $r = a \cos t i + b \sin t j + ct k$  का चाप है,  
जिसकी सीमायें  $t = 0$  से  $t = \frac{\pi}{2}$  तक है। 6/7

Evaluate  $\int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , where  
 $\mathbf{F} = yzi + zxj + xyk$  and  $c$  is the arc of the  
helix  $\rightarrow r = a \cos t i + b \sin t j + ct k$  from  
 $t = 0$  to  $t = \frac{\pi}{2}$ .

अथवा

(Or)

स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए जब  
 $\mathbf{F} = x^2 i + xyj$  जहाँ  $c$ ,  $xy$  समतल में वर्ग की  
परिमाप है जिसकी भुजायें रेखाओं  
 $x = 0, y = 0, x = a, y = a$  के अनुदिश हैं।  
Verify Stoke's theorem for the function  
 $\mathbf{F} = x^2 i + xyj$  integrated round the square  
in  $xy$ - plane whose sides are along the lines  
 $x = 0, y = 0, x = a, y = a$ .

( 6 )

U - 339

उकाई - III

( Unit - III )

4. शाक्व  $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y = 0$  का  
अनुरूपण कीजिए तथा इसकी नाभियों के निरेशांक  
एवं इसकी उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए। 6/7
- Trace the conic  
 $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y = 0$  and find the  
coordinates of its foci and its eccentricity.

अथवा

(Or)

मिठु कीजिए कि दो शाक्व  $\frac{l_1}{r} = 1 + e, \cos \theta$   
तथा  $\frac{l_2}{r} = 1 + e_2 \cos(\theta - \alpha)$  एक दूसरे को स्पर्श  
करते हैं यदि-

$$l_1^2(1-e_2^2) + l_2^2(1-e_1^2) = 2l_1 l_2 (1 - e_1 e_2 \cos \alpha)$$

Show that the two conics  $\frac{l_1}{r} = 1 + e, \cos \theta$

and  $\frac{l_2}{r} = 1 + e_2 \cos(\theta - \alpha)$  will touch one  
another if

$$l_1^2(1-e_2^2) + l_2^2(1-e_1^2) = 2l_1 l_2 (1 - e_1 e_2 \cos \alpha)$$

इकाई - IV  
(Unit - IV)

5. दर्शाइये कि  $x + y + z = 0$ ,  
 $ayz + bzx + cxy = 0$  द्वारा प्राप्त रेखाओं के  
बीच का कोण  $\left(\frac{\pi}{2}\right)$  है यदि  $a + b + c = 0$  तथा  
 $\left(\frac{\pi}{3}\right)$  है यदि  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ . 6/7

Prove that the angle between the lines given by—

$$x + y + z = 0, ayz + bzx + cxy = 0 \text{ is } \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

if  $a + b + c = 0$  but  $\left(\frac{\pi}{3}\right)$  if  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ .

अथवा

(Or)

सिद्ध कीजिए कि लम्ब वृतीय बेलन का समीकरण  
जिसका अक्ष  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$  है तथा जो  
बिन्दु  $(0, 0, 3)$  से गुजरता है.

$$10x^2 + 13y^2 + 5z^2 - 6yz - 12zx - 4xy - 36x - 18y + 30z - 135 = 0$$

( 8 ) U - 339  
Prove that the equation of the right circular  
cylinder whose axis is  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$   
and passes through  $(0, 0, 3)$  is :

$$10x^2 + 13y^2 + 5z^2 - 6yz - 12zx - 4xy - 36x - 18y + 30z - 135 = 0$$

इकाई - V  
(Unit - V)

6. शंकवज  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  के बिन्दु  
 $(\alpha, \beta, \gamma)$  पर स्पर्श समतल का समीकरण ज्ञात  
कीजिए। 6/7

To find equation of tangent plane at  $(\alpha, \beta, \gamma)$   
to the conicoid  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ .

अथवा

(Or)

सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्तज  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$   
शून्य वृत्तक गोले  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - b^2 + c^2$   
पर स्थित है।

Prove that the umbilics of the ellipsoid

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  lie on the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - b^2 + c^2.$$